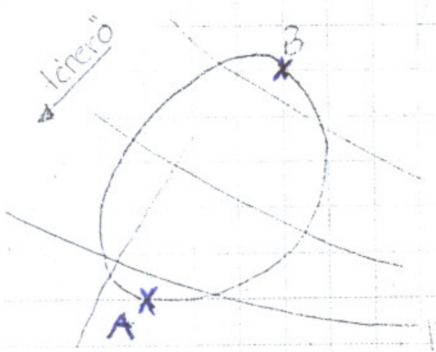
- Az erőtér egy vektormező, vektor-vektor függvény, amely a tér minden egyes pontjához a teret jellemző nagyságú és irányú vektort (erőt) rendel.
- A gyakorlatban előforduló erőterek esetén az erővonalakra merőleges felület egy erővonalat csak egy helyen metsz.
- Az erőtér trajektóriái (azok a görbék, amelyek érintői bármely pontban egyirányúak az adott pontban levő térerővel) és az állandó potenciálú (ekvipotenciális) felületek merőlegesek egymásra.
- A potenciált a térerő irányával ellentétesen vesszük növekvőnek, ugyanis nagyobb potenciálúnak megállapodásszerűen azt a helyet akarjuk tekinteni, amelybe a tömeg más erőknek a térerővel szemben végzett munkája árán jut.
- A potenciálkülönbség az egységnyi tömegnek az egyik felületről a másikra való átviteléhez szükséges munkát jelenti.
- A potenciál mint munka skaláris mennyiség, melynek értéke csak a helytől függ, és két pont közötti potenciálkülönbség független az integrálás útvonalától.

erővonal



potenciál felület

$$U_B - U_A = \int_A^B \bar{F}\,d\bar{s} = -\int_B^A \bar{F}\,d\bar{s}$$

$$\boxed{\oint \bar{F}\,d\bar{s} = 0}$$

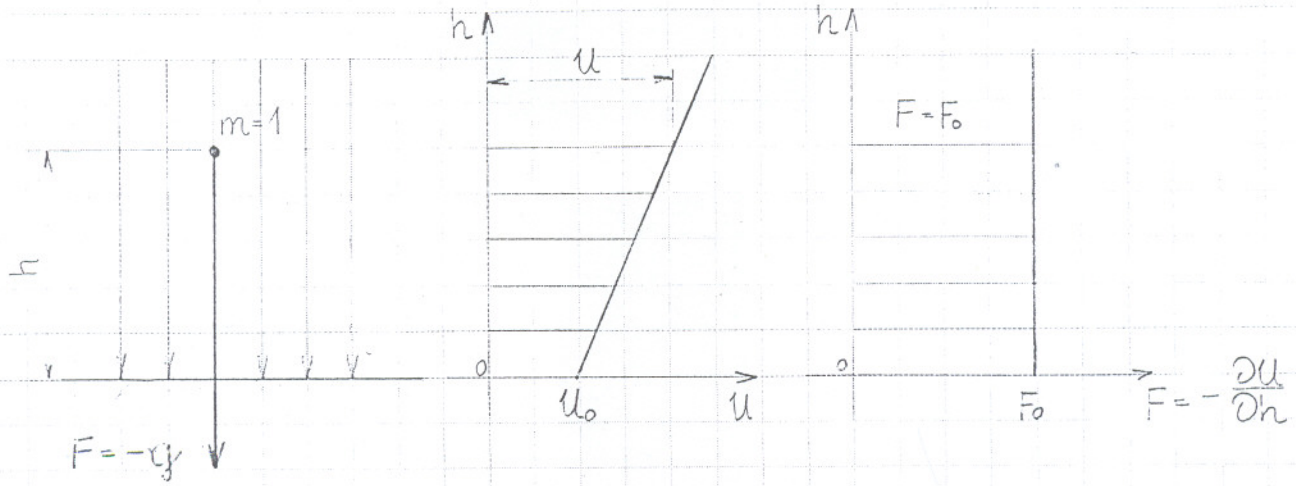
Gravitációs erőtér
- A nehézségi erő (súlyerő) hatásvonala függőlegesen lefelé mutat. A nehézségi erőtér eszerint függőleges (tehát egymással párhuzamos) erővonalakkal ábrázolható. Az erővonalakra merőleges ún. szintfelületek a nehézségi erőterben a „vízszintes" síkok.
- Ezek mentén a térerőnek nincsen összetevője, és ezért egy-egy szintfelület valamennyi pontjában a potenciál (i ugyanakkora.
- A potenciál, vagyis a térerő hatása alatt álló egy segédtömeg munkaképessége annál nagyobb, minnél magasabb szintfelületbe emeljük.
- Nehézségi erőterben a választott (h=0) alapszintről

A/2-2. „h" magasságra emelt egységtömeg helyzeti energiája, vagyis a „h"-szint potenciálja:

$$\boxed{U = U_0 + g \cdot h}$$

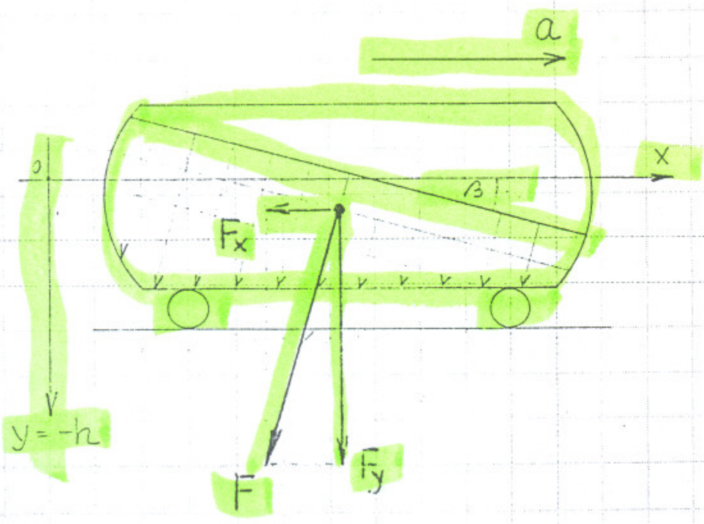
A térerő pedig a potenciálnak negatív gradiense, azaz:

$$\boxed{F = -\frac{\partial U}{\partial h} = -g}$$



Gyorsuló rendszer:

- Gyorsuló rendszerhez kötött tömeg minden elemében a súlyerőn kívül a gyorsulással arányos és azzal ellentétes értelemben ható tehetetlenségi erő is ébred. A gyorsuló rendszer erőterében tehát az erővonalak irányát e két erő eredője határozza meg.
- Az erővonalak a vízszintes irányban egyenletesen gyorsulva haladó rendszerben (pl. állandó „a" gyorsulással indított tartálykocsiban) a függőlegestől β szöggel térnek el. Ugyanekkora szöget zárnak be a szintfelületek is a vízszintes alapsíkkal.

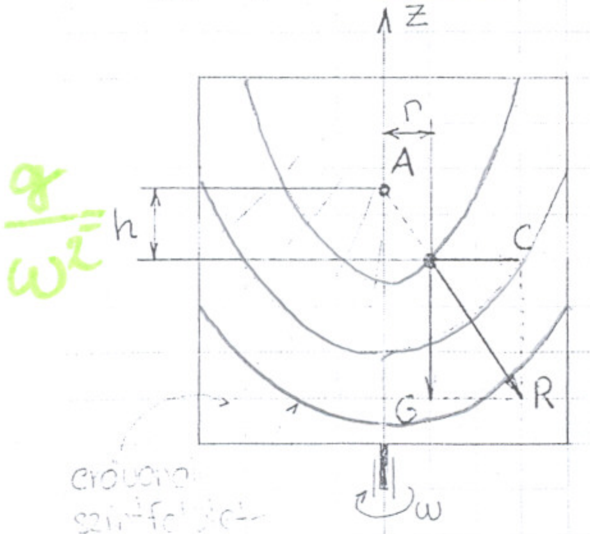


$$\boxed{U = U_0 + a \cdot x - g \cdot y}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -a$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = g$$

Függőleges tengely körül forgó rendszer:



$G = m\,g$

$C = m\,r\cdot\omega^2$

$$\frac{h}{r} = \frac{G}{C} \Rightarrow h = r\cdot\frac{G}{C} = r\cdot\frac{m\,g}{m\,r\,\omega^2}$$

$$\boxed{h = \frac{g}{\omega^2}}$$

- A forgó tengely körül egyenletes ω szögsebességgel keringő m tömeg súlypontját támadó C centrifugális erő most vízszintes irányú, és a G súlyerővel oly R erőt ad, amely a tengelyt $h = g/\omega^2$ magasságban metszi a keringés síkja fölött.
- Az erőtér minden vízszintes síkjához más-más A pont tartozik, és csak egy-egy ilyen sík pontjaihoz tartozó térerők alkotnak sugársort.
- Az erőtér erővonalai az A pont vándorlása miatt meggörbülnek, és így az ezekre merőleges szintfelületek sem maradhatnak síkok, hanem forgásfelületekké torzulnak.
- A szintfelületek meridiánvonalának alakját abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy minden ponthoz tartozó térerő e pont felett ugyanabban a h magasságban metszi a z-tengelyt. Ez a metszék ugyanis a görbe szubnormálisa, amely minden pontra ugyanakkora, vagyis a meridiánvonal: parabola, a szintfelület pedig forgási paraboloid
- A szintfelület alakját analitikai úton a következőképpen határozhatjuk meg. Legyen a forgástengely $z=0$ pontjában a potenciál U_0, akkor a $(r=0, z=0)$ kezdőponton átmenő szintfelület bármely (r,z) pontjában is változatlanul $U=U_0$ a potenciál. Ebben a pontban a térerő két összetevője: $F_r = r\cdot\omega^2$ és $F_z = -g$; ezek munkájával megváltozott potenciál tehát:

$$U = U_0 - \int_0^r F_r\,dr - \int_0^z F_z\,dz$$

$$U = U_0 - \frac{r^2\omega^2}{2} + g\cdot z \quad ; \quad \boxed{U - U_0 - \frac{r^2\omega^2}{2} + g\cdot z = 0}$$

Ebből

$$z = \frac{r^2\omega^2}{2g} = H$$

a paraboloid magassága és $r^2 = 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} z = 2 \cdot h \cdot z$ a meridiánvonal egyenlete. Ebben $h = g/\omega^2$ a parabola paramétere.

Konzervatív erőtér:

- Ha az erőtérnek létezik a potenciálfüggvénye (potenciálos), akkor az erőtér konzervatív.
- Az erőtérnek akkor és csakis akkor létezik a potenciálja, ha $rot\,\bar{v} = 0$.

Stokes-tétele: Legyen $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$ és parciális deriváltjai az F irányított felületdarabon és annak g zárt görbével megadott határán folytonosak. Ekkor

$$\iint_F rot\,\bar{v}\,d\bar{F} = \oint_g \bar{v}\,d\bar{r}$$

konzervatív ≡ potenciálos ≡ rotációmentes ≡ örvénymentes ($rot\,\bar{v} = 0$)

$$rot\,\bar{v} = 0 \Longrightarrow \oint_g \underbrace{\bar{v}\,d\bar{r}}_{\text{cirkuláció}} = 0$$

$$rot\,\bar{v} = \bar{\nabla} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

- Ha az áramló folyadékkal kitöltött tér pontjaihoz tartozó sebességi vektorokat egyidejűleg rögzítjük, ezek burkoló görbéit az ún. áramvonalakat kapjuk.
- Az áramvonalak érintői: a sebesség vektorai, a folyadék mozgástörvényét egyértelműen meghatározzák, és az erőtér mintájára sebességi térről is beszélhetünk, amelyben az erővonalak szerepét az áramvonalak veszik át.

- Ha az áramlás örvénymentes ($rot\,\bar{v} = 0$), akkor a sebességi tér az ún. sebességi potenciállal jellemezhető, amely függvényalakban fejezi ki az ún. potenciálos áramlás törvényeit, hasonlóan, mint a térerőt meghatározó potenciál.
- A sebességi potenciált mint $\varphi(x, y, z)$ függvényt úgy szokás értelmezni, hogy annak gradiense pozitív előjellel adja a tér bármelyik pontjához tartozó sebességi vektort, azaz:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \; ; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, , \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- A tér azonos sebességi potenciálú pontjai az áramvonalakra merőleges szintfelületeket alkotnak, az áramvonalak pedig az ún. áramcsövek alkotói.

- Az áramlások szemléletes jellemzéséhez a folyadéktérben három görbét definiálunk: áramvonal, pálya, nyomvonal

Áramvonal:

- Az áramvonal egy adott pillanatban a sebességvektorok burkoló görbéje, tehát az a görbe, melynek a sebességvektorok mindenütt érintői.
- Egyenlete

$$dx : dy : dz = v_x : v_y : v_z$$

vektoriálisan:

$$\bar{v} \times d\bar{s} = 0$$

Pálya:

- egy elemi folyadékrészecske útja

Nyomvonal:

A tér egy adott kijelölt pontján áthaladó folyadékrészecskék pillanatnyi helyzetét leíró görbe.

- az a görbe, melyen a tér valamely pontján áthaladt részecskék egy adott pillanatban sorakoznak.

nyv.

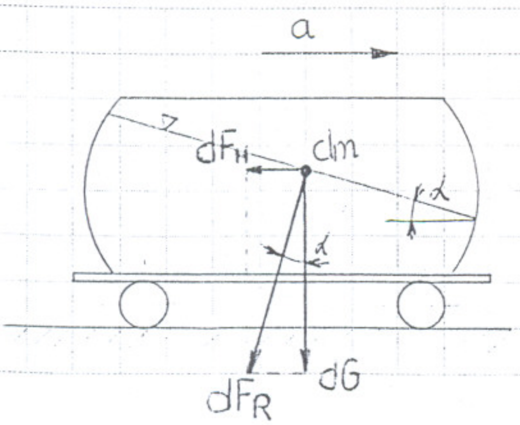
Áramcső:

Áramvonalakból mint alkotókból álló felület.

- Egy zárt A görbére illeszkedő áramvonalakból álló áramfelület az áramcső.

Szabad felszín alakja gyorsuló kocsi esetén:

- A folyadék az azt tartalmazó edényt (a folyadék mennyiségétől függő mértékben) kitölti, az edény alakjához simulva helyezkedik el.
- A folyadék és gáz érintkezési felületét <u>szabad felszínnek</u> nevezzük
- A nyugalomban levő szabad felszín minden pontjában a rá ható erő irányára merőlegesen helyezkedik el.
- Amikor a folyadékrészecskére csak a nehézségi erő (súlyerő) hat, a szabad felszín vízszintes sík. Pontosabban gömbfelület, de „kis" méretű tartályokban a sík laptól való eltérés elhanyagolható.



$$dG = dm \cdot g$$
$$dF_H = dm \cdot a$$

- „a" gyorsulással mozgó tartályban egy dm tömegű folyadék-részecskére függőleges irányban lefelé $dG = dm\,g$ súlyerő, vízszintes irányban a gyorsulással ellentétes irányú $dF_H = dm\,a$ tömegerő hat. Ezek dF_R eredője a szabad felszínre merőleges.
- A szabad felszínnek a vízszintessel bezárt hajlásszögét, α-t, a dF_R és dG által bezárt szög adja meg.

$$tg\alpha = \frac{dF_H}{dG} = \frac{dm\,a}{dm\,g} = \frac{a}{g} \qquad \boxed{tg\alpha = \frac{a}{g}}$$

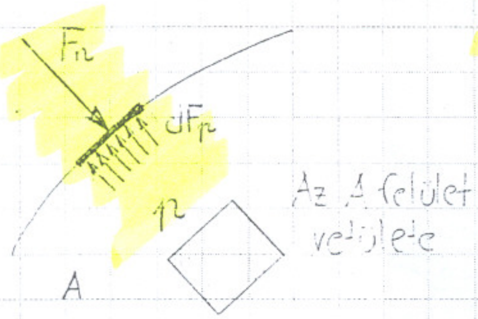
- A közeg az azt határoló falra erőt fejt ki. A fal egységnyi felületére ható erőt nyomásnak, pontosabban statikus nyomásnak nevezzük. Mivel a fal felülete görbe is lehet, továbbá a fal mentén a nyomás változhat, a nyomás a következő módon határozható meg:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

ahol ΔF a közeg hatására ΔA felületelemre ható erő
ΔA a közeget határoló fal egy felületeleme

- Mivel a nyomás hatása minden irányban egyenlő ez csak skaláris mennyiség lehet.
- A nyomás és a felületelem szorzata viszont erőt (vektort) ad, ezért a felületelemet vektormennyiségnek kell tekintenünk.

$$\Delta \bar{F} = p \cdot \Delta \bar{A} \quad \text{ahol}$$



$\Delta \bar{A}$ merőleges a felületelemre és:
- görbe felület esetén a görbületi középponttól való távolodás irányába;
- zárt felületnél mindig a körülzárt térből kifelé mutat

- Ezek figyelembevételével a nyomás meghatározása:

$$\boxed{p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{|\Delta \bar{F}|}{|\Delta \bar{A}|}}$$

- A nyomás hatására keletkező erő ezért mindig merőleges a közeget határoló falra.
- Ha egy zárt A felület környezetében a nyomás p = állandó úgy a nyomás hatására a zárt felületre ható F eredő erőt a következő egyenlet határozza meg:

$$F = \int_A p(-d\bar{A}) = -\int_A p\, d\bar{A} = 0$$

- A negatív előjel nélkül F nem az A felületre ható eredő erőt, hanem az A felületről annak környezetére ható eredő erőt jelentené. Az eredő erő azért 0, mert minden felületelemmel szemben egy ezzel ellentett irányítású felületelem van. Ellenkező esetben a felület nem volna zárt.

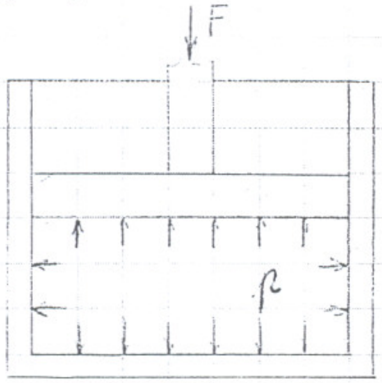
Túlnyomás: a tartályban uralkodó abszolút nyomás és a légköri nyomás különbsége. Amennyiben a tartályban uralkodó nyomás a légköri nyomásnál kisebb, úgy negatív túlnyomás (depresszió, vákuum) van a tartályban.

- A nyomás SI-mértékegysége a newton/négyzetméter (N/m^2). Ennek neve: Pascal; jele: Pa

$$\boxed{[p] = \frac{N}{m^2} = Pa}$$

$$\frac{N}{mm^2} = MPA$$

Dugattyúerő hatása:



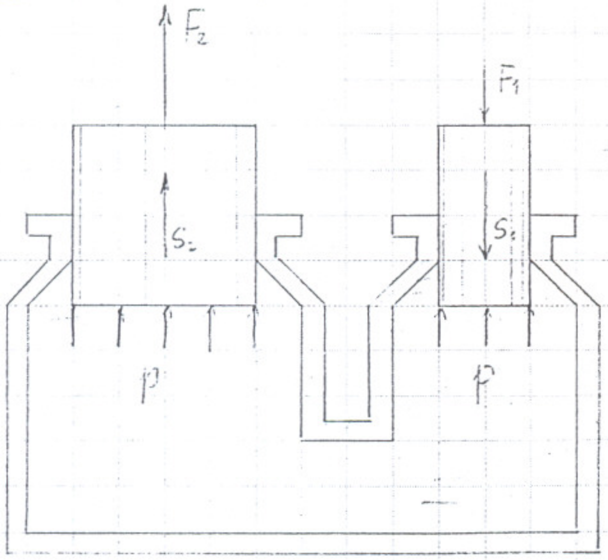
- A dugattyúra ható F erő következtében a folyadékban homogén nyomástér keletkezik. A nyomás nagysága

$$p = \frac{F}{A} \leftarrow \text{dugattyú felülete}$$

Pascal-törvénye: zárt térben a külső nyomás minden irányban egyenletesen és gyengítetlenül tovaterjed.

- Elhanyagolva a nehézségi erőből származó nyomást, a folyadék belsejében levő és a határoló falakra ható nyomás mindenütt egyenlő nagyságú.

Hidraulikus sajtó:

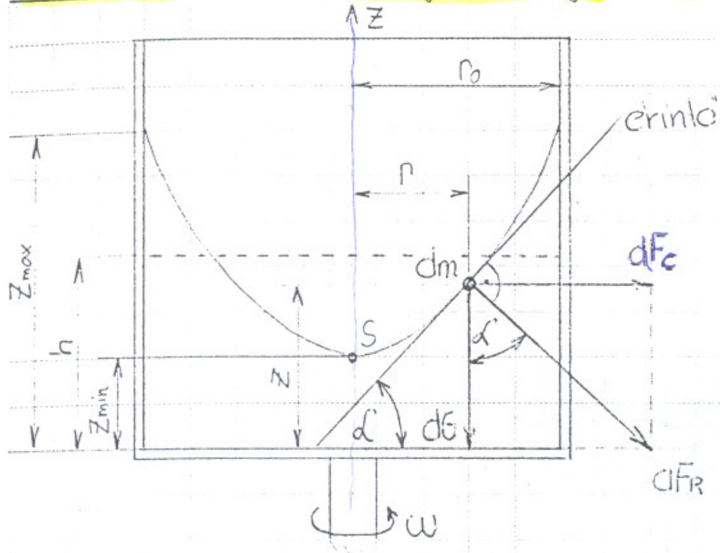


$$p = \frac{F_1}{A_1}, \quad F_2 = p \cdot A_2$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

$$A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2 \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Szabad felszín alakja forgó tartály esetén:



$dG = dm\,g$

$dF_c = dm \cdot r \cdot \omega^2$

- A dG és dF_c erők eredője dF_R, amely a szabad felszínre merőleges.
- dm pont koordinátái: (r, z)

$$tg\alpha = \frac{dz}{dr}$$

$$tg\alpha = \frac{dF_c}{dG} = \frac{dm \cdot r \cdot \omega^2}{dm \cdot g} = \frac{r \cdot \omega^2}{g}$$

- tehát:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r \cdot \omega^2}{g}$$ SZEPARÁBILIS DIFFERENCIÁLEGYENLET

- szétválasztva a változókat, és integrálva:

$$\int dz = \frac{\omega^2}{g} \int r\,dr$$

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} + K$$ ha $r = 0$, akkor $z = z_{min}$, tehát $K = z_{min}$

$$\boxed{z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} + z_{min}}$$

- a szabad felszínt képző forgási paraboloid alakja a folyadék anyagjellemzőitől független

- A forgási paraboloid alakú felszín és a z_{min} magasságban elhelyezkedő vízszintes sík által határolt folyadék térfogata megegyezik ezen sík és a folyadéknak h magasságú nyugalmi felszíne közötti térfogattal

$$V = r_0^2 \cdot \pi \cdot (h - z_{min})$$ h és z_{min} közti térfogat

$$V = r_0^2 \cdot \pi (z_{max} - z_{min}) - V_{paraboloid}$$ forgási paraboloid [illegible] térfogat

- Ismeretes, hogy a másodfokú paraboloid térfogata az ezt befoglaló körhenger térfogatának a fele:

$$V_{paraboloid} = r_0^2 \pi \cdot (z_{max} - z_{min})/2$$

$$V = r_0^2 \cdot \pi \cdot (z_{max} - z_{min})/2$$

- A V térfogatra felírt két összefüggést egyenlővé téve

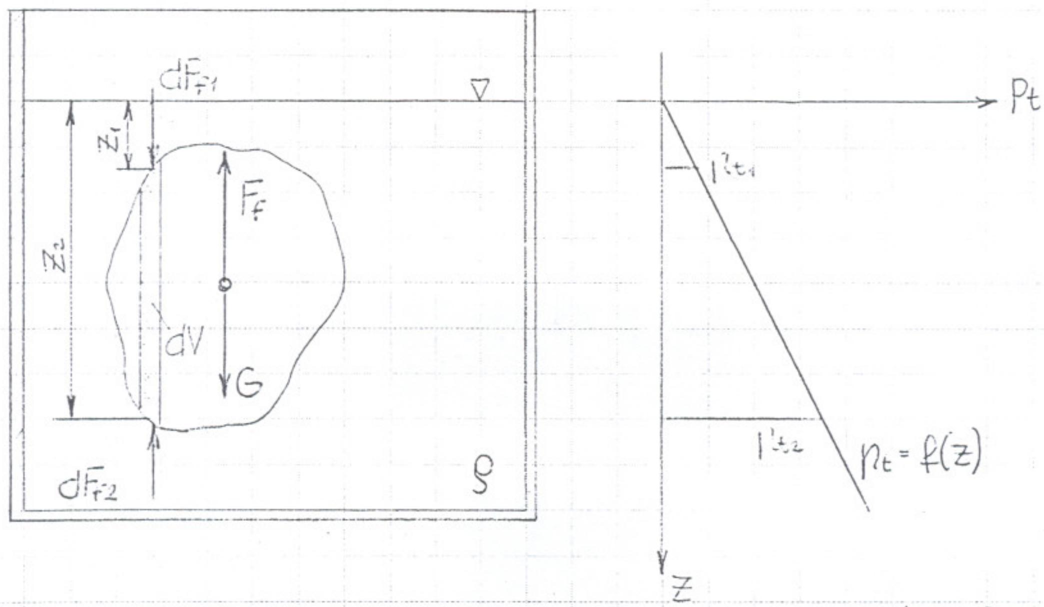
$$r_0^2 \cdot \pi \cdot (h - z_{min}) = r_0^2 \cdot \pi \cdot (z_{max} - z_{min})/2$$

$$h = \frac{z_{max} + z_{min}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{max} &= \frac{\omega^2 \cdot r_0^2}{2g} + z_{min} \\ h &= \frac{z_{max} + z_{min}}{2} \end{aligned}\right\} \quad h = \frac{\omega^2 \cdot r_0^2}{4g} + z_{min}$$

$$\boxed{z_{min} = h - \frac{\omega^2 \cdot r_0^2}{4g}}$$

$$\boxed{z_{max} = h + \frac{\omega^2 \cdot r_0^2}{4g}}$$



- Homogén folyadékba teljesen bemerített testre függőleges, felfelé irányuló F_f statikus felhajtóerő hat. Az F_f statikus felhajtóerő a testre ható nyomóerők eredője.
- A bemerített testnek egy hasáb alakú dV térfogatelemére a folyadék a következő erőkkel hat:

  - A felső felületelemre:

$$dF_{f1} = p_{t1} \cdot dA = \rho \cdot g \cdot z_1 \cdot dA$$

  - Az alsó felületelemre:

$$dF_{f2} = p_{t2} \cdot dA = \rho \cdot g \cdot z_2 \cdot dA$$

- a dV térfogatelemre fölfelé ható dF_f felhajtóerő

$$dF_f = dF_{f2} - dF_{f1} = \rho \cdot g \cdot \underbrace{(z_2 - z_1) dA}_{dV} = \boxed{\rho \cdot g \cdot dV}$$

$$F_f = \int dF_f = \int \rho \cdot g \cdot dV = \rho \cdot g \int dV = \rho \cdot g \cdot V$$

$$\boxed{F_f = \rho \cdot g \cdot V}$$

Archimedes törvénye: A folyadékba teljesen bemerített testre ható felhajtóerő a kiszorított folyadéktérfogat súlyerejével egyenlő. A felhajtóerő következtében a bemerített testnél látszólagos súlyveszteség tapasztalható.

Felh.erő = súlyerővel

Az úszás és a lebegés:

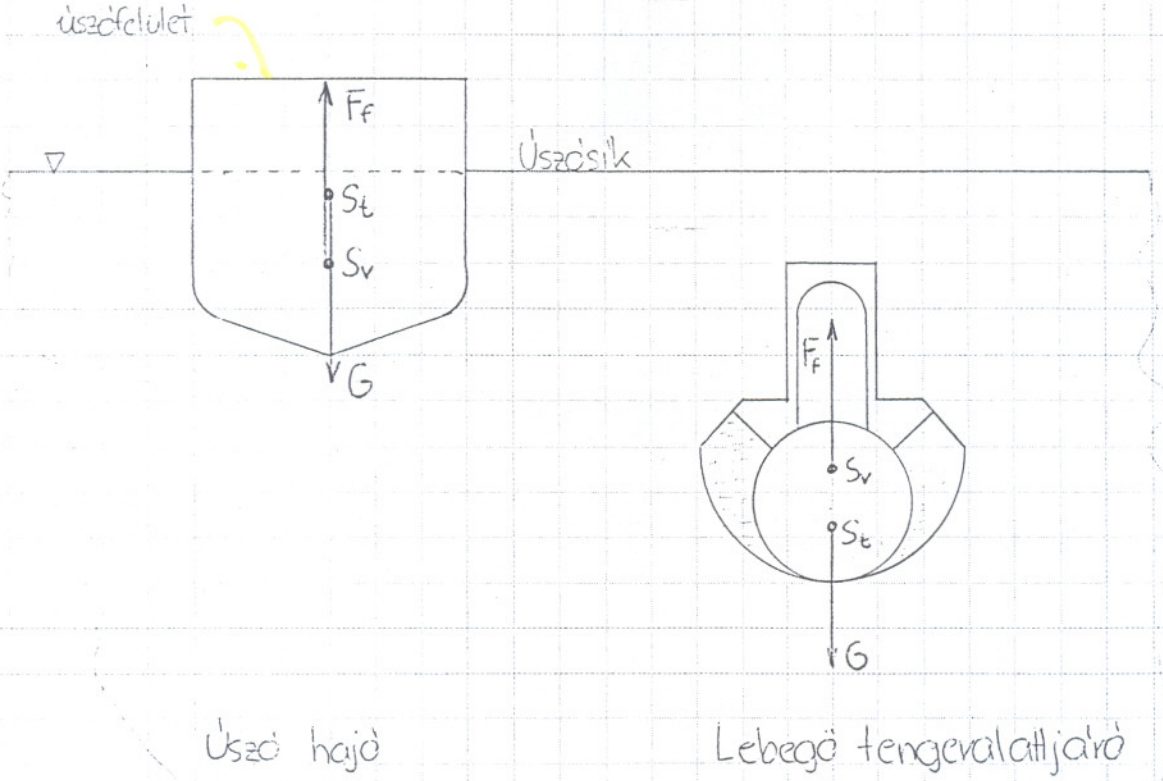
Úszás: Ha a folyadékba merülő testre ható F_f felhajtóerő egyenlő a bemerülő test G súlyerejével, és a test egy része nem merül el a folyadékban.

Lebegés: Ha a folyadékba merülő testre ható F_f felhajtóerő egyenlő a bemerülő test G súlyerejével, és a test teljesen bemerül a folyadékba.

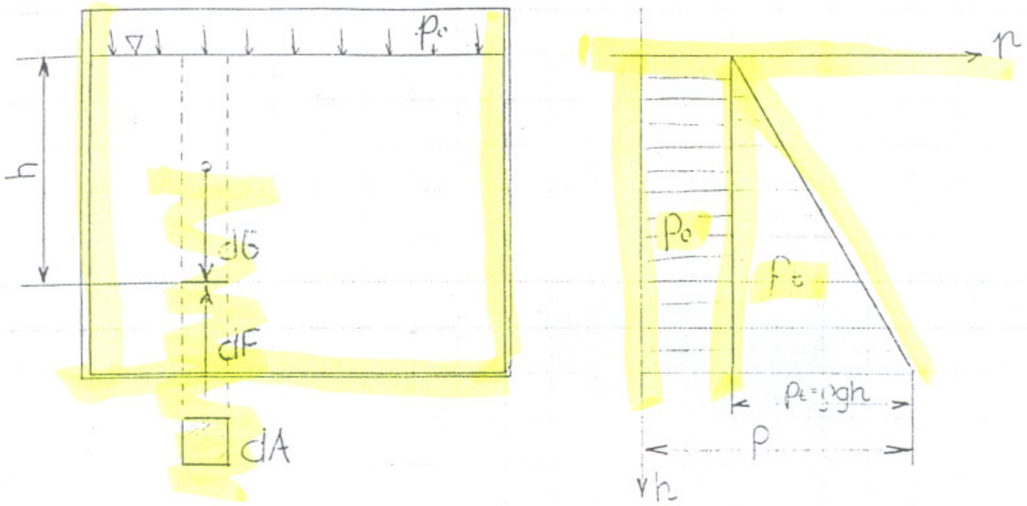
- Az úszás és a lebegés egyensúlyi feltétele:

$$\boxed{F_f = G}$$

- Úszó testeknél a folyadékfelületet úszósíknak nevezik. A testnek az úszósíkban levő metszetének felületét úszófelületnek vagy vízvonalfelületnek nevezik.
- A test S_t súlypontja és az S_v vízkiszorítás súlypontja a felhajtóerő, és a súlyerő közös függőleges hatásvonalában van. Ezt a közös hatásvonalat úszási tengelynek nevezik.



Nehézségi erő hatása:



- A nyitott tartályban levő folyadék fölötti nyomás p_0. Ez a nyomás egyenletesen terjed a folyadékban és hozzáadódik a h folyadékmélységben fellépő, a nehézségi erő okozta p nyomáshoz, melynek értéke a következő egyensúlyi feltételekből határozható meg:

$$\left.\begin{aligned} dG &= \rho\cdot g\cdot dV = \rho\cdot g\cdot h\cdot dA \\ dF &= p\cdot dA \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} dG &= dF \\ \rho\cdot g\cdot h\cdot dA &= p\cdot dA \end{aligned}$$

HIDROSZTATIKA ALAPTÖRVÉNYE $\boxed{p = \rho\cdot g\cdot h}$

- A nyomás egyenesen arányos a folyadékmélységgel.
- Azonos h mélységben levő pontokon azonos p nyomás uralkod A nyomáseloszlás az edény alakjától és nagyságától független
- Az abszolút nyomás „h" mélységben:

$$\boxed{p_{absz} = p_0 + p = p_0 + \rho\cdot g\cdot h}$$

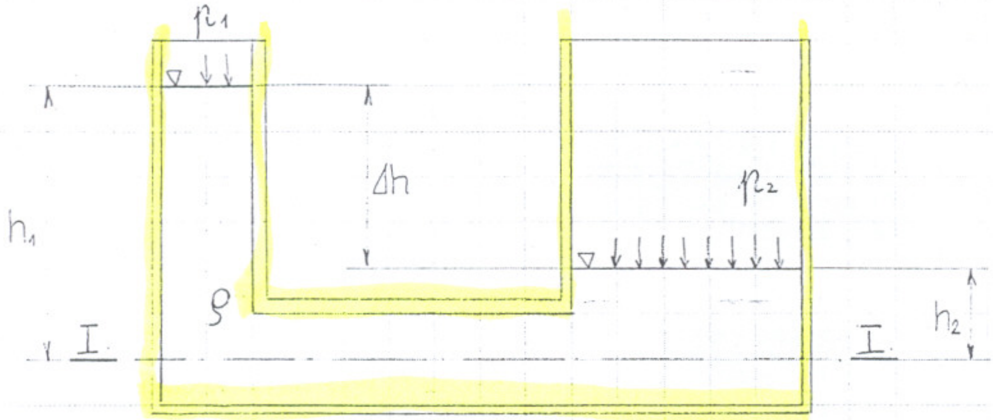
- Két, egymással nem keveredő, különböző sűrűségű folyadék egy tartályba öntve a kisebb sűrűségű folyadék a nagyobb sűrűségű fölött helyezkedik el. A nyomás a tartály fenekén:

$$\boxed{p = p_0 + \rho_1\cdot g\cdot h_1 + \rho_2\cdot g\cdot h_2}$$

$$p = \cancel{\rho} \; p_0 + p_1 + p_2$$

Közlekedőedények:

- Mivel a vízszintes sík minden pontjában azonos nyomás uralkodik, így lehetővé válik, hogy egymással kapcsolatban álló közlekedőedényekben kialakuló felszínek helyzetét meghatározzuk.



- Az I–I szintben ható nyomás p_I = állandó

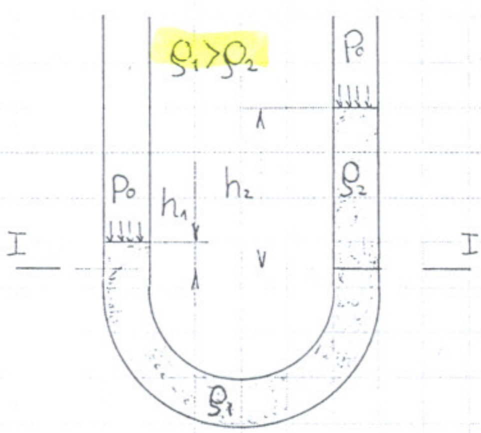
$$\left.\begin{aligned} p_I &= p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 \\ p_I &= p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 \end{aligned}\right\} \quad p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

$$\boxed{\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h}$$

- ha $p_1 = p_2 \Rightarrow \Delta h = 0 \Rightarrow$ vízállásmutató

Sűrűségmérés U-csővel:

- Öntsünk egy U-csőbe két különböző sűrűségű homogén folyadékot. A nagyobb sűrűségű folyadék a cső mindkét szárában helyezkedjék el, míg a könnyebb csupán az egyik szárban, a nehezebb folyadék felett. A két folyadék határfelületén áthaladó vízszintes I–I síkban mindkét szárban azonos a nyomás, azaz:



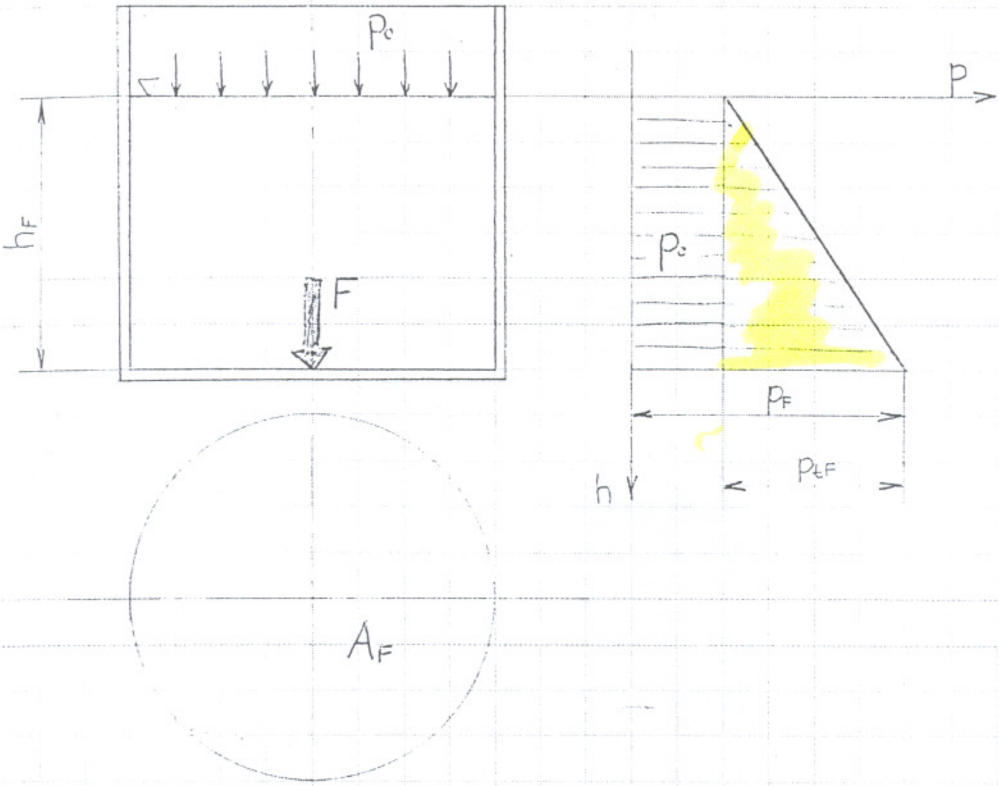
$$\left.\begin{aligned} p_I &= p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \\ p_I &= p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \end{aligned}\right\} \quad p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2$$

$$\boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}}$$

Hidrosztatikai paradoxon:



- A tartály fenekén fellépő p_F nyomás:

$$p_F = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_F$$

- Mivel a tartályon kívül, tehát a fenéklap alatt is p_0 nyomás hat, a fenékre ható nyomóerő a p_{tF} túlnyomásból adódik:

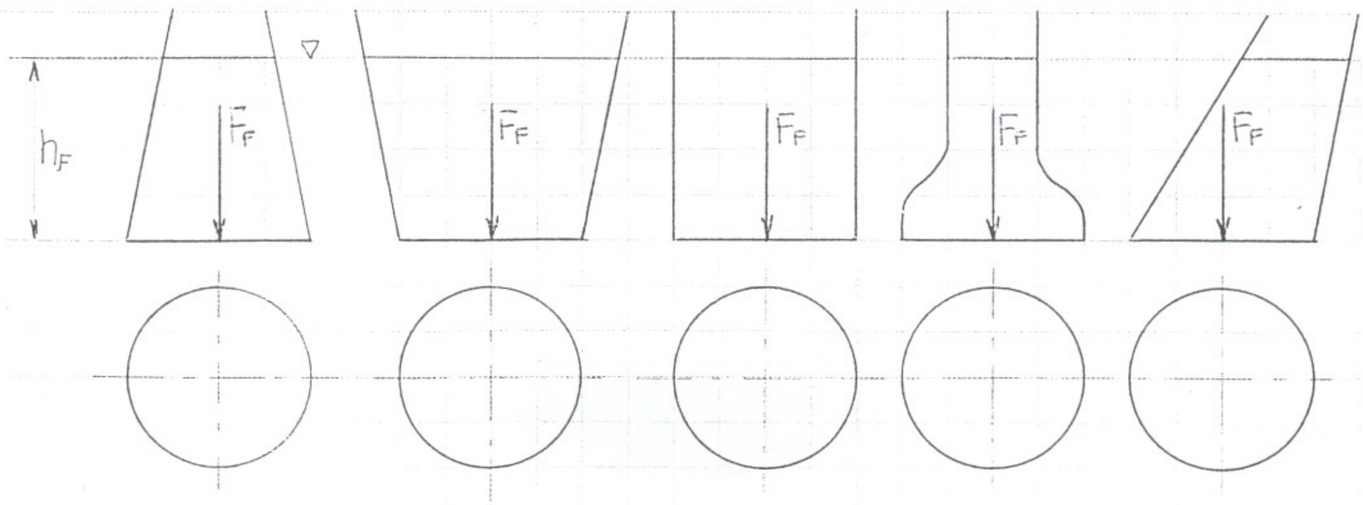
$$p_{tF} = \rho \cdot g \cdot h_F$$ $p_0 = áll$

- Így a fenékre ható nyomóerő a p_{tF} fenéknyomásból és a fenék A_F területéből:

$$F_F = p_{tF} \cdot A_F$$

$$\boxed{F = \rho \cdot g \cdot h_F \cdot A_F}$$

- Tehát a fenéknyomásból származó erő csak a folyadék ρ sűrűségétől, a folyadékoszlop h_F magasságától és a fenéklap A_F területétől függ
- Azonos alapterületű, azonos folyadékszintig, azonos folyadékkal megtöltött tartályoknál a fenéknyomásból származó erő azonos.
- Ez az erő a tartály alakjától független
- Ezt a jelenséget hidrosztatikai paradoxonnak nevezik


h_F
F_F
F_F
F_F
F_F
F_F